

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut



seit 1548

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades Bachelor of Science

Thema:

Beiträge zur Selbstaffinität konvexer Polygone

vorgelegt von: Katharina Blechschmidt
Matrikelnummer: 113406
geboren am: 16.07.1988
in: Jena
Erstgutachter: Dr. Christian Richter
Zweitgutachter: Dr. Ernst Dietzel

Jena, den 10.09.2012

Zusammenfassung

Ein konvexes Polygon P ist k -selbstaffin (bzw. k -selbstähnlich), wenn es in $k \geq 2$ Polygone zerlegt werden kann, die affingleich (bzw. ähnlich) zu P sind. Es ist bewiesen, dass P dann nur höchstens fünf Ecken besitzen kann. Dabei ist bekannt, dass jedes Dreieck selbstähnlich und jedes konvexe Viereck selbstaffin ist.

Weiterhin weiß man, dass einerseits ein selbstaffines konvexes Fünfeck existiert, aber andererseits das reguläre Fünfeck nicht selbstaffin ist. In dieser Arbeit wird nun zunächst gezeigt, dass jedes Fünfeck, dessen Innenwinkelgrößen alle 108° betragen, nicht selbstaffin ist. Daraufhin werden Überlegungen dargestellt, dass ein Fünfeck ebenfalls nicht selbstaffin ist, wenn die Innenwinkelgrößen leicht von 108° abweichen.

Desweiteren besteht die Vermutung, dass kein selbstähnliches konvexes Fünfeck existiert. Die Innenwinkelgrößen, die ein solches haben müsste, sind bereits bekannt. Ebenfalls ist die Reihenfolge der Winkel bewiesen, jedoch bleiben dabei zwei mögliche Orientierungen übrig. Es wird gezeigt, dass die Fünfecke, in die das ursprüngliche Fünfeck zerlegt ist, nicht alle gleichorientiert sein können.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Definitionen	4
2	Einschränkung der Eckzahl des selbstaffinen Polygons	6
3	Selbstaffine und selbstähnliche Drei- und Vierecke	10
3.1	Dreiecke	10
3.2	Vierecke	11
4	Selbstaffine und selbstähnliche Fünfecke	15
4.1	Selbstaffine Fünfecke	15
4.2	Selbstähnliche Fünfecke	26
	Literaturverzeichnis	32
	Anlagen	33

Kapitel 1

Einführung und Definitionen

Hertel und Richter haben angefangen die Menge der selbstaffinen konvexen Polygone der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 zu klassifizieren (siehe z.B. [1, 2]). In der vorliegenden Arbeit wird ein Teil dieser Ergebnisse zusammengefasst und versucht, weiterhelfende Erkenntnisse zu finden.

Genauer gesagt werden nicht nur selbstaffine konvexe Polygone betrachtet, sondern zunächst beliebige selbstaffine konvexe Körper des \mathbb{R}^2 . Ein *konvexer Körper* bezeichnet eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge, deren Inneres nichtleer ist.

Bei der Frage, ob ein gegebener konvexer Körper selbstaffin ist, wird nach der Existenz einer speziellen Zerlegung dieses gefragt. Dabei sind die Mengen K_1, \dots, K_k , für $k \geq 2$, eine *Zerlegung* des konvexen Körpers K , wenn $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$ und $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) = \emptyset$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$, wobei $\text{int}(S)$ das Innere einer Menge S bezeichnet.

Ein konvexer Körper ist nun *k-selbstaffin*, $k \geq 2$, wenn affine Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, \dots, k$, in der Art existieren, dass $\varphi_1(K), \dots, \varphi_k(K)$ eine Zerlegung von K ist.

Sind nun alle Abbildungen φ_i Ähnlichkeitsabbildungen, so ist K sogar *k-selbstähnlich*.

Da die Eigenschaften affiner Abbildungen im Weiteren gebraucht werden, werden diese und die Definitionen von Ähnlichkeits- und affinen Abbildungen hier noch einmal kurz aufgeführt.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine *affine Abbildung*, wenn f darstellbar ist als $f(x) = A \cdot x + v$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, v \in \mathbb{R}^2$ und $\det(A) \neq 0$ ¹.

Eine solche Abbildung ist durch die Angabe von drei Punkten, die nicht kollinear sind, und deren Bildpunkte eindeutig bestimmt.

Unter einer affinen Abbildung wird eine Figur im Allgemeinen in jede Richtung unterschiedlich stark verzerrt, sie ist damit weder längen- noch winkeltreu. Es gibt jedoch Eigenschaften, die erhalten bleiben:

¹Bei allgemeinsten affinen Abbildungen, die z.B. auch Projektionen auf Teilräume umfassen, wird $\det(A) \neq 0$ nicht gefordert. Im Kontext der Selbstaffinität betrachten wir jedoch nur Abbildungen aus der Gruppe der (invertierbaren) Affinitäten und setzen deshalb $\det(A) \neq 0$ voraus.

- Bilder von Punkten, die kollinear sind, sind wieder kollinear (liegen alle auf einer Geraden)
- parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet
- das Teilverhältnis von drei kollinearen Punkten stimmt mit dem der Bildpunkte überein

Ähnlichkeitsabbildungen haben die Gestalt $f(x) = a \cdot A \cdot x + v$ ($v \in \mathbb{R}^2$) mit einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $a > 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn ein $a > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt: $|f(x) - f(y)| = a \cdot |x - y|$. Die reelle Zahl a wird in diesem Fall als Ähnlichkeitsfaktor bezeichnet.

Zwei Mengen heißen dann *affin gleich* bzw. *ähnlich*, wenn eine affine bzw. Ähnlichkeitsabbildung zwischen ihnen existiert.

Nun ist bekannt, was ein selbstaffiner konvexer Körper ist, jedoch besagt der Titel der vorliegenden Arbeit, dass es um konvexe Polygone gehen soll. Die Einschränkung auf diese kommt von der in [5] gezeigten Tatsache, dass jeder selbstaffine konvexe Körper ein Polygon ist.

Ein *konvexes Polygon* bezeichnet die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten des \mathbb{R}^2 , die nicht alle kollinear sind.

Im Weiteren ist bei der Verwendung der Begriffe Polygon, Drei-, Vier- oder Fünfeck immer ein konvexes Polygon gemeint.

Eine erste starke Einschränkung bei der Klassifikation der selbstaffinen Polygone wird im nächsten Kapitel gegeben. Die dann noch übrigen zu betrachtenden Fälle werden in den Kapiteln 3 und 4 unterschiedlich stark betrachtet.

Für das 2. Kapitel werden noch weitere Begriffe benötigt:

Ein *Graph* G ist ein Objekt $G = (V; E)$, bestehend aus einer Menge V von *Knoten* und einer symmetrischen Relation $E \subseteq V \times V$, deren Elemente *Kanten* genannt werden.

Die Anzahl aller sich in einem Knoten $v \in V$ treffenden Kanten wird *Grad von v* genannt:

$$\deg(v) := |\{x \in V : (v, x) \in E\}|$$

Ein Graph heißt *planar* oder kreuzungsfrei, wenn er in einer Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endknoten treffen.

Ist ein planarer Graph G in \mathbb{R}^2 eingebettet durch sein Bild \overline{G} , so nennen wir die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ *Flächen* von \overline{G} und auch von G .

Kapitel 2

Einschränkung der Eckzahl des selbstaffinen Polygons

Die Klassifikation der selbstähnlichen und -affinen konvexen Polygone hat durch folgenden Satz eine entscheidende Einschränkung erhalten und es besteht unter anderem durch diesen die Hoffnung, dass die Klassifikation irgendwann vollständig möglich sein könnte. Der Satz stammt aus [1, Satz 1] und wird dort auf ähnliche Art bewiesen.

In dem Beweis wird die Eulersche Formel für planare Graphen verwendet, weshalb diese zunächst noch einmal erklärt werden soll.

Satz 2.1. Eulersche Formel für planare Graphen:

Bezeichnet $\begin{bmatrix} v \\ e \\ f \\ c \end{bmatrix}$ die Anzahl der $\begin{bmatrix} \text{Knoten} \\ \text{Kanten} \\ \text{Flächen} \\ \text{Zusammenhangskomponenten} \end{bmatrix}$ eines planaren Graphen, so gilt

$$v - e + f = c + 1.$$

Beweis. Durch strukturelle Induktion:

Induktionsanfang: Die Formel gilt für den leeren Graphen $G = (\emptyset, \emptyset)$:

Dieser besitzt 0 Knoten, 0 Kanten und 0 Zusammenhangskomponenten, jedoch eine Fläche. Die Formel liefert $1 = 1$. ✓

Induktionsschritt: Vorausgesetzt die Formel gilt für einen bestimmten Graphen, dann bleibt sie auch richtig, wenn Knoten und/oder Kanten hinzugefügt werden:

- Hinzufügen eines Knotens:

Liegt der neue Knoten im Inneren einer Fläche, so erhöht sich neben der Anzahl der Knoten auch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten um 1:

$$\begin{aligned} (v + 1) + f - e &= (c + 1) + 1 \\ \Leftrightarrow v + f - e &= c + 1 \quad \checkmark \text{ (mit Induktionsvoraussetzung)} \end{aligned}$$

Liegt der neue Knoten im relativen Inneren einer Kante, so erhöht sich neben der Anzahl der Knoten auch die Anzahl der Kanten um 1:

$$\begin{aligned}(v+1) + f - (e+1) &= c+1 \\ \Leftrightarrow v + f - e &= c+1 \quad \checkmark \text{ (mit Induktionsvoraussetzung)}\end{aligned}$$

- Hinzufügen einer Kante:

Verbindet die neue Kante zwei verschiedene Zusammenhangskomponenten, dann werden diese zu einer:

$$\begin{aligned}v + f - (e+1) &= (c-1) + 1 \\ \Leftrightarrow v + f - e &= c+1 \quad \checkmark \text{ (mit Induktionsvoraussetzung)}\end{aligned}$$

Verbindet die neue Kante zwei Knoten derselben Zusammenhangskomponente, so entstehen aus einer Fläche zwei neue Flächen:

$$\begin{aligned}v + (f+1) - (e+1) &= c+1 \\ \Leftrightarrow v + f - e &= c+1 \quad \checkmark \text{ (mit Induktionsvoraussetzung)}\end{aligned}$$

Da jeder beliebige planare Graph aus dem leeren Graphen durch geeignetes Hinzufügen von Knoten und Kanten erzeugt werden kann, ist die Formel bewiesen. \square

Satz 2.2. Ist ein konvexes n -Eck P in $k \geq 2$ konvexe n -Ecke P_i zerlegt ($i = 1, \dots, k$), so gilt $3 \leq n \leq 5$.

Bemerkung. Es ist somit weder möglich, ein konvexes n -Eck mit $n \geq 6$ in dazu affgleiche n -Ecke zu zerlegen noch in beliebige konvexe n -Ecke.

Zum Beweis von Satz 2.2 wird ein noch allgemeinerer Satz bewiesen:

Satz 2.3. Ist ein konvexes n -Eck P in $k \geq 2$ konvexe m -Ecke P_i zerlegt ($i = 1, \dots, k$), so gilt

$$k(m-6) < n-6.$$

Beweis. Um mit Hilfe der Eulerschen Formel Aussagen über Zerlegungen $P = \bigcup P_i$ eines konvexen Polygons treffen zu können, stellt sich zunächst die Frage, auf welchen Graphen $G = (V, E)$ sie überhaupt angewendet werden soll. Wir benötigen also einen Zusammenhang zwischen Graphen und Zerlegungen.

Dazu konstruieren wir zu einer vorhandenen Zerlegung eines konvexen n -Ecks $P = \bigcup_{i=1}^k P_i$ in konvexe m -Ecke P_i einen Graphen $G = (V, E)$ wie folgt:

Die Eckpunkte aller Teile bilden die Knotenmenge, $V := \bigcup_{i=1}^k \text{vert}(P_i)$.

Eine Strecke AB soll genau dann eine Kante von E sein, wenn sie auf dem Rand eines Polygons P_i liegt und $AB \cap V = \{A, B\}$ gilt (es gibt keinen weiteren Knoten aus V zwischen A und B).

Weiter bezeichne $v := |V|$ die Anzahl aller Knoten, v_2 die Anzahl aller Knoten vom Grad 2, v_3 die Anzahl aller Knoten dritten oder höheren Grades und $e := |E|$ die Anzahl der Kanten.

Dann gelten folgende (Un-)Gleichungen:

$$(I) \quad v_2 \leq n$$

Höchstens die Eckpunkte von P haben den Grad 2. Von allen Knoten im Inneren von P gehen mindestens drei Kanten weg, da P und alle P_i konvex sind.

$$(II) \quad 2v_2 + 3v_3 \leq 2e$$

Kantenzählung über die Anzahl der Knoten: Die Knoten, die Eckpunkte von P sind, haben mindestens Grad 2 und alle anderen Ecken der P_i mindestens Grad 3 (wenn sie genau Grad 2 bzw. 3 haben, besteht somit Gleichheit). Dabei zählen wir jedoch jede Kante zwei Mal, deshalb $2e$.

$$(III) \quad k \cdot m + n \leq 2e$$

Kantenzählung über die Anzahl der Seiten: P hat n Seiten und jedes P_i ($i = 1, \dots, k$) hat m Seiten. Dabei zählen wir jede Seite genau zwei Mal, solange keine Seite von P oder eines der P_i einen Knoten im relativ Inneren hat. Ansonsten erhalten wir eine echte Ungleichung.

$$(IV) \quad v + k - e = 1$$

Eulersche Formel für eine Zusammenhangskomponente: $v - e + (k + 1) = 1 + 1$.

Nun nutzen wir diese (Un-)Gleichungen gezielt aus:

Aus (II) folgt durch Addition von v_2 und Anwenden von (I)

$$3v = 3v_2 + 3v_3 = 2v_2 + 3v_3 + v_2 \leq 2e + v_2 \leq 2e + n$$

Damit kann $3v$ ersetzt werden in $3 \cdot (IV)$:

$$3v + 3k - 3e = 3 \Rightarrow 2e + n + 3k - 3e \geq 3,$$

woraus $n + 3k - 3 \geq e$ und somit $2n + 6k - 6 \geq 2e$ folgt.

Ungleichung (III) schätzt $2e$ nach unten ab, so dass wir

$$2n + 6k - 6 \geq 2e \geq k \cdot m + n$$

erhalten. Eine dieser beiden Ungleichungen ist strikt: Da wir $k \geq 2$ voraussetzen, muss es mindestens eine Kante geben, die auf dem Rand von P beginnt. Beginnt sie in einer Ecke von P , können nur noch höchstens die anderen $n - 1$ Eckpunkte den Grad 2 haben, d.h. (I) ist eine echte Ungleichung und die vordere Ungleichung somit strikt.

Beginnt die Kante im relativ Inneren einer Kante von P , werden auf der linken Seite von (III) nicht alle Seiten doppelt gezählt, so dass dies eine echte Ungleichung darstellt. Somit wäre dann die hintere Ungleichung strikt. Es folgt

$$2n + 6k - 6 > k \cdot m + n$$

und daraus

$$n - 6 > k \cdot (m - 6).$$

□

Beweis von Satz 2.2. P ist nun in n -Ecke P_i zerlegt, also $m = n$ und somit wegen Satz 2.3

$$k(n-6) < (n-6),$$

woraus folgende Fälle entstehen:

$$\begin{array}{lll} n = 6 & : & 0 > 0 \\ n > 6 & : & k < 1 \\ n < 6 & : & k > 1 \end{array}$$

also ein Widerspruch für mehr als fünf Eckpunkte.

□

Kapitel 3

Selbstaffine und selbstähnliche Drei- und Vierecke

Wegen Satz 2.2 reicht es, auf der Suche nach selbstaffinen oder gar selbstähnlichen Polygonen, nur Drei-, Vier- und Fünfecke zu betrachten. Deshalb soll in diesem Kapitel zunächst ein Überblick über einen Teil des bekannten Wissens zu Drei- und Vierecken gegeben werden, bevor dann in Kapitel 4 die Fünfecke genauer betrachtet werden.

3.1 Dreiecke

Jedes Dreieck ist selbstähnlich und damit auch selbstaffin.

Eine mögliche Zerlegungsvariante ist die folgende: Von jeder Kante wird der Mittelpunkt bestimmt und die drei so entstandenen Mittelpunkte miteinander verbunden. So ist jedes der vier entstandenen Dreiecke ähnlich zu dem ursprünglichen mit einem Ähnlichkeitsfaktor von $a = \frac{1}{2}$. Das Beispiel in Abbildung 3.1 veranschaulicht dies.

Bei einer selbstaffinen Zerlegung kann jede beliebige Zerlegung in Dreiecke gewählt werden, da alle Dreiecke affingleich sind. Zwischen zwei beliebigen Dreiecken existiert immer eine affine Abbildung, die das eine auf das andere abbildet, indem den drei Eckpunkten die jeweiligen anderen drei Eckpunkte zugeordnet werden.

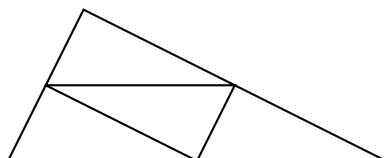


Abbildung 3.1: Jedes Dreieck ist selbstähnlich, da diese Zerlegungsvariante immer möglich ist.

3.2 Vierecke

Selbstaffine Vierecke

Jedes konvexe Viereck ist selbstaffin. Um dies zu zeigen werden zunächst mehrere Definitionen und Hilfssätze benötigt, die aus [1] stammen.

$\mu(pq)$ bezeichne die vorzeichenbehaftete Längenmaßzahl der gerichteten Strecke pq . Das *Teilverhältnis* von drei kollinearen Punkten u, v, w sei dann:

$$TV(uvw) = \frac{\mu(uw)}{\mu(wv)}.$$

Dieses verwenden wir, um konvexe Vierecke in Klassen einzuteilen. Ein Viereck $V = v_1w_1v_2w_2$ heißt vom *Typ* (a, b) [$V = V(a, b)$], wenn die Eckpunkte so bezeichnet werden können, dass für den Diagonalschnittpunkt $s := v_1v_2 \cap w_1w_2$ gilt

$$b := TV(w_1w_2s) \geq a := TV(v_1v_2s) \geq 1.$$

Ein Beispiel dazu ist in Abbildung 3.2 gezeigt.

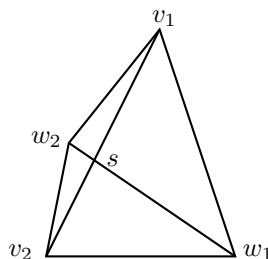


Abbildung 3.2: Damit dieses Viereck vom Typ (a, b) ist, müssen die Ecken so wie abgebildet bezeichnet werden, da dann $b = \frac{|w_1s|}{|sw_2|} \geq a = \frac{|v_1s|}{|sv_2|} \geq 1$ gilt.

Mit Hilfe dieser Definition entstehen Klassen affingleicher Vierecke, da folgender Satz gilt:

Satz 3.1. Zwei Vierecke sind genau dann affingleich, wenn sie vom gleichen Typ (a, b) sind.

Beweis. Wenn zwei Vierecke affingleich sind, dann sind sie auch vom gleichen Typ, da Teilverhältnisse unter affinen Abbildungen erhalten bleiben. Die Umkehrung folgt direkt aus dem folgenden Lemma:

Lemma 3.2. Jedes Viereck $V = V(a, b)$ vom Typ (a, b) ist affingleich zu einem *Standardviereck* $V_0 = vwe_2e_1$, dessen Ecken die Koordinaten $v = (a, 0)^T$, $w = (0, b)^T$, $e_2 = (-1, 0)^T$ und $e_1 = (0, -1)^T$ haben.

Beweis. Sei $V = v_1w_1v_2w_2$ ein beliebiges Viereck vom Typ (a, b) . Da es zu jedem beliebigen, nicht kollinearen, drei Punkten und ihren Bildpunkten eine affine Abbildung gibt, existiert genau eine affine Abbildung φ , die das Dreieck $D = v_2w_2s$

auf das Dreieck $D_0 = e_2 e_1 O$ abbildet (wobei $O = (0, 0)^T$ den Koordinatenursprung bezeichnet). Wir können dabei fordern, dass $\varphi(v_2) = e_2$, $\varphi(w_2) = e_1$ und $\varphi(s) = O$ gilt (siehe Abbildung 3.3). Wegen der Teilverhältnistreue der affinen Abbildung φ gilt dann auch $\varphi(v_1) = v$ und $\varphi(w_1) = w$ und damit $\varphi(V) = V_0$. \square

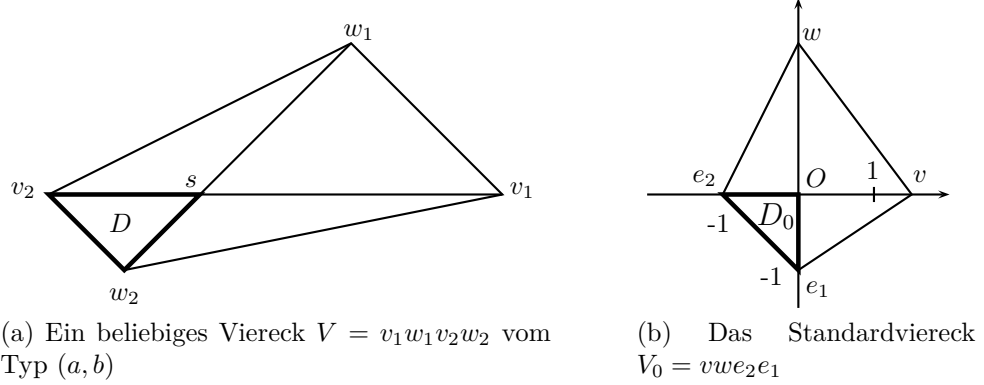


Abbildung 3.3: (zum Beweis von Lemma 3.2) Jedes beliebige Viereck $V = V(a, b)$ ist affingleich zu einem Standardviereck V_0 durch eine Abbildung φ mit $\varphi(D) = \varphi(v_2 w_2 s) = e_2 e_1 O = D_0$.

Ein Spezialfall der Vierecke sind die Trapeze, für diese gilt: Ein Viereck $V = V(a, b)$ ist genau dann ein Trapez, wenn $a = b$ gilt. Dann ist a das Verhältnis der Längen der parallelen Seiten von V .

Nun sind die Grundlagen gegeben, um zu zeigen, dass jedes Viereck selbstaffin ist, genauer gesagt gilt (dieser Satz stammt aus [2, Proposition 1]):

Satz 3.3. Jedes konvexe Viereck ist 5-selbstaffin.

Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 3.4. Sei $1 \leq a \leq b$. Dann lässt sich jedes Trapez vom Typ $(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ in zwei Vierecke vom Typ (a, b) zerlegen.

Beweis. Ein Repräsentant eines Trapezes vom Typ $(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ ist $T = (0, b)^T (-1, 0)^T (a, -a-1)^T (a + \frac{a}{b}, -1)^T$ (siehe Abbildung 3.4). Der Anstieg der Kante $(-1, 0)^T (0, b)^T$ beträgt b und der der Kante $(a, -a-1)^T (a + \frac{a}{b}, -1)^T$:

$$\frac{a}{\frac{a}{b}} = b.$$

Damit sind dies die parallelen Kanten von T und T somit ein Trapez. Weiterhin beträgt das Verhältnis ihrer Längen:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 1^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 + 1^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(1 + b^2)}} = \frac{b}{a}.$$

Folglich ist T vom Typ $(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$.

Die Strecke $(a, 0)^T(0, -1)^T$ zerteilt T in zwei Vierecke. Die Diagonalen des einen Vierecks sind dann $(0, b)^T(0, -1)^T$ und $(-1, 0)^T(a, 0)^T$ und damit parallel zu den Koordinatenachsen. Weiterhin schneiden sie sich im Punkt $(0, 0)^T$. Folglich ist dieses Viereck vom Typ (a, b) . Das zweite Viereck hat die Diagonalen $(a, 0)^T(a, -a-1)^T$ und $(0, -1)^T(a + \frac{a}{b}, -1)^T$, die somit auch parallel zu den Koordinatenachsen sind. Der Schnittpunkt der Diagonalen ist im Punkt $(a, -1)^T$ und das Viereck folglich vom Typ $(\frac{a+1-1}{1}, \frac{a}{a+\frac{a}{b}-a}) = (a, b)$.

Da alle anderen Trapeze, die vom Typ $(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ sind, durch eine affine Abbildung φ affingleich zu T sind, können sie in die zwei Vierecke von oben zerteilt werden, auf die jedoch noch φ angewendet werden muss. \square

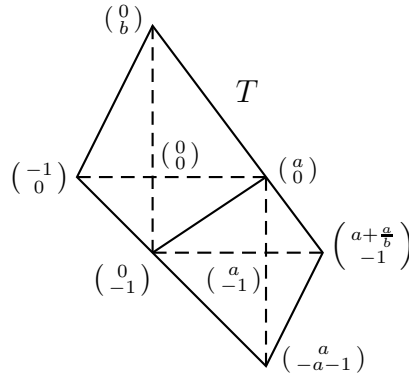


Abbildung 3.4: (zum Beweis von Lemma 3.4) Die Zerlegung eines Trapezes $T(\frac{b}{a}, \frac{b}{a})$ in zwei Vierecke vom Typ (a, b)

Beweis von Satz 3.3. Sei $V = v_1v_2v_3v_4$ ein beliebiges Viereck.

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass V ein Trapez ist. Seien dabei ohne Einschränkung v_1v_4 und v_2v_3 die parallelen Kanten von V . Dann zerteilen wir V in Trapeze V_i mit den Eckpunkten $v_1 + \frac{i-1}{5}(v_4 - v_1)$, $v_2 + \frac{i-1}{5}(v_3 - v_2)$, $v_2 + \frac{i}{5}(v_3 - v_2)$ und $v_1 + \frac{i}{5}(v_4 - v_1)$ für $i = 1, \dots, 5$, was anhand von Abbildung 3.5a nachvollzogen werden kann. Damit erhalten wir jedoch bereits fünf Trapeze desselben Typs, da das Verhältnis der beiden parallelen Seiten gleich geblieben ist.

Nun betrachten wir den Fall, dass V kein Trapez ist. Das heißt, V ist von einem Typ (a, b) mit $1 \leq a < b$, da der Fall $a = b$ nicht auftritt, wenn V kein Trapez ist. Sei φ eine Streckung mit Streckungszentrum v_1 und Streckungsfaktor $\frac{a}{b}$. Da $a < b$ gilt, ist $\varphi(V)$ kleiner als V und durch die Wahl des Streckungszentrums somit eine Teilmenge von V . Folglich ist es möglich, V in $\varphi(V) = v_1\varphi(v_2)\varphi(v_3)\varphi(v_4)$ und zwei Trapeze $T_1 = \varphi(v_2)v_2v_3\varphi(v_3)$ und $T_2 = v_3v_4\varphi(v_4)\varphi(v_3)$ zu zerteilen (siehe Abbildung 3.5b).

Die parallelen Kanten von T_1 sind v_2v_3 und $\varphi(v_2)\varphi(v_3)$, wobei die letztere durch die Wahl von φ eine Länge von $\frac{a}{b} \cdot |v_2v_3|$ hat. Folglich ist T_1 vom Typ

$$\left(\frac{|v_2v_3|}{\frac{a}{b} \cdot |v_2v_3|}, \frac{|v_2v_3|}{\frac{a}{b} \cdot |v_2v_3|} \right) = \left(\frac{b}{a}, \frac{b}{a} \right).$$

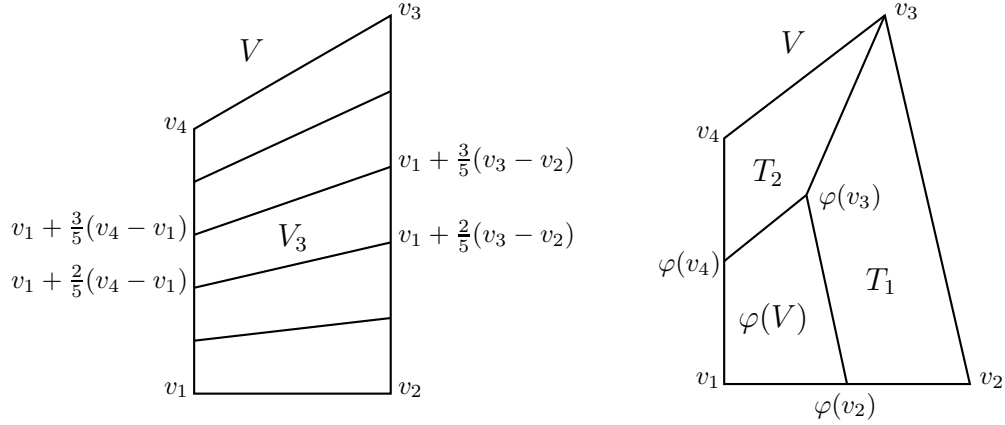
T_2 ist vom selben Typ, da das Verhältnis der parallelen Seiten in diesem Fall

$$\frac{|v_3v_4|}{\frac{a}{b} \cdot |v_3v_4|} = \frac{b}{a}$$

beträgt.

Lemma 3.4 besagt nun, dass T_1 und T_2 jeweils in zwei Vierecke vom Typ (a, b) zerteilt werden können. Dass $\varphi(V)$ ebenfalls vom Typ (a, b) ist, ist klar, da φ eine Streckung ist.

Somit erhalten wir insgesamt fünf Vierecke desselben Typs wie V . □



(a) Die 5-selbstaffine Zerlegung eines Trapezes mit Eckpunkten eines Beispiel-Zerlegungsstücks V_i für $i = 3$

(b) Die 5-selbstaffine Zerlegung eines beliebigen Vierecks

Abbildung 3.5: (zum Beweis von Satz 3.3)

Beispiele von 3-selbstaffinen Vierecken werden in [4] gegeben. Eine Klassifikation der 2-selbstaffinen Vierecke in [1]. Weiterhin gibt es natürlich den Spezialfall der selbstähnlichen Vierecke:

Selbstähnliche Vierecke

Es gilt nicht, dass jedes Viereck selbstähnlich ist.

Ein Beispiel für ein selbstähnliches Viereck ist das Quadrat oder Rechteck, wie in Abbildung 3.6 zu sehen.

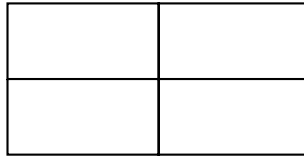


Abbildung 3.6: Ein Beispiel für ein selbstähnliches Viereck ist das Rechteck.

Ein Beispiel für ein nicht selbstähnliches Viereck ist jedes Viereck, in dem drei Winkel echt größer als $\frac{\pi}{2}$ sind [3, Lemma 2.7].

Kapitel 4

Selbstaffine und selbstähnliche Fünfecke

4.1 Selbstaffine Fünfecke

In [1] wird noch die Vermutung geäußert, dass kein konvexes Fünfeck selbstaffin ist. In [2] wird jedoch gezeigt, dass ein 27-selbstaffines Fünfeck existiert.

Andererseits wird dort auch gezeigt, dass das reguläre Fünfeck nicht selbstaffin ist. Der Beweis dazu wird in dieser Arbeit nun als Grundlage genommen, um einen allgemeineren Satz zu zeigen:

Satz 4.1. Jedes konvexe Fünfeck, dessen Innenwinkelgrößen alle $\frac{3\pi}{5}$ betragen, ist nicht selbstaffin.

Beweis. Sei P ein konvexes Fünfeck, dessen Innenwinkelgrößen alle $\frac{3\pi}{5}$ betragen. Wir nehmen an, dass P in dazu affingleiche Fünfecke P_1, \dots, P_k , $k \geq 2$, zerteilt sei. Dies wird nun über eine Argumentation der Winkelgrößen der P_i , die am Rand von P liegen, zum Widerspruch geführt.

Die Menge $\{bd(P) \cap bd(P_i) : i = 1, \dots, k\}$ teilt den Rand von P (kurz mit $bd(P)$ bezeichnet) in endlich viele Stücke, die sich paarweise berühren. Wir vernachlässigen die Stücke, die aus einem einzelnen Punkt bestehen.

Dann bilden alle übrig gebliebenen Stücke eine Zerteilung des Randes von P in der Art, dass sie den Rand von P überdecken, aber verschiedene Stücke höchstens gemeinsame Endpunkte haben.

Wir wählen eine Orientierung auf dem Rand von P und bezeichnen die übrig gebliebenen Stücke in der entsprechenden Reihenfolge mit C_1, \dots, C_m . Die Schnittpunkte dieser seien mit c_1, \dots, c_m bezeichnet und zwar so, dass $C_{j-1} \cap C_j = \{c_j\}$, $j = 1, \dots, m$, gilt (wobei wir den Index j modulo m rechnen).

Für jedes C_j gibt es ein spezielles $i(j) \in \{1, \dots, k\}$ in der Art, dass $C_j \subseteq bd(P) \cap bd(P_{i(j)})$. Die Winkel von diesem $P_{i(j)}$ in den Ecken c_j und c_{j+1} bezeichnen wir jeweils mit α_j und β_j . Dann gilt für jedes C_j eine der folgenden Möglichkeiten, welche in Abbildung 4.1 mit jeweils einem Beispiel dargestellt sind:

- 1. Fall: C_j enthält keine Ecke von P in seinem relativ Inneren
- 2. Fall: C_j enthält genau eine Ecke von P in seinem relativ Inneren
- 3. Fall: C_j enthält zwei oder mehr Ecken von P in seinem relativ Inneren

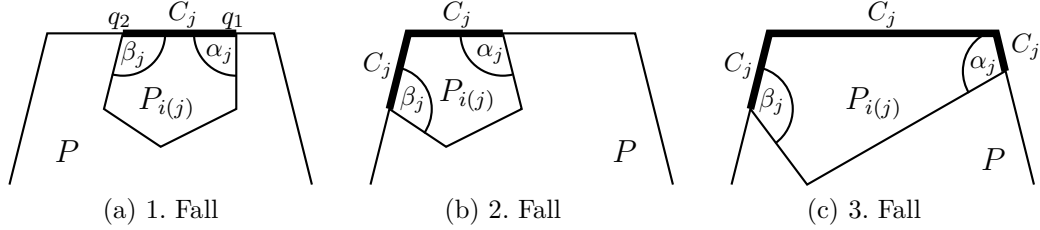


Abbildung 4.1: (zum Beweis von Satz 4.1) Möglichkeiten wie viele Ecken von P in C_j enthalten sind

Für alle 3 Fälle wählen wir nun ein beliebiges aber festes $P_{i(j)}$ und zeigen, dass dann $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$ gilt.

Dabei werden folgende weitere Bezeichnungen verwendet: Die Ecken von P werden in der gewählten Orientierung nacheinander mit p_1, \dots, p_5 bezeichnet. Die Ecken von $P_{i(j)}$ bezeichnen wir mit q_1, \dots, q_5 , so dass gilt: $q_1 = \varphi_{i(j)}(p_1), \dots, q_5 = \varphi_{i(j)}(p_5)$ für die affine Abbildung $\varphi_{i(j)}$ ($i(j) \in \{1, \dots, k\}$), die P auf $P_{i(j)}$ abgebildet hat.

1. Fall: Es sei ohne Einschränkung die Kante q_1q_2 der Schnitt von $P_{i(j)}$ mit P (so wie auch in Abbildung 4.1a dargestellt, im Maximalfall kann q_1q_2 auch mit der gesamten entsprechenden Kante von P übereinstimmen).

Die Geraden durch p_5p_1 , p_2p_3 und p_1p_2 bestimmen ein Dreieck (eine Beispielskizze ist in Abbildung 4.2 dargestellt). Das Bild dieses Dreiecks unter der affinen Abbildung $\varphi_{i(j)}$ ist wieder ein Dreieck. Damit gilt $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$, was anhand von Abbildung 4.3 noch einmal anschaulich nachvollzogen werden kann.

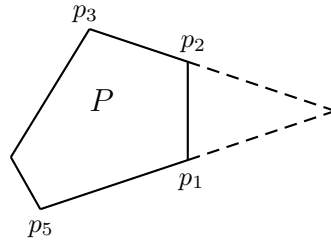


Abbildung 4.2: (zum Beweis Satz 4.1, 1. Fall) Das durch die Geraden p_5p_1 , p_2p_3 und p_1p_2 bestimmte Dreieck

2. Fall: Es sei R ein reguläres Fünfeck, so dass die Kanten parallel zu denen von P sind (das ist möglich, da P nur Innenwinkel der Größe $\frac{3\pi}{5}$ hat). Unten zeigen wir, dass dann für $\varphi_{i(j)}(R)$ gilt: Wenn γ_1 , γ_2 und γ_3 drei aufeinanderfolgende Winkel sind und $|\gamma_2| = \frac{3\pi}{5}$ beträgt, dann gilt $|\gamma_1| + |\gamma_3| > \pi$.

Da die Bilder paralleler Geraden wieder parallel sind, sind somit die Kanten von

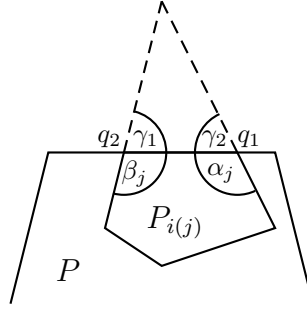


Abbildung 4.3: (zum Beweis von Satz 4.1, 1. Fall) Es gilt $|\gamma_1| + |\gamma_2| < \pi$, da sonst kein Dreieck entsteht, also $|\alpha_j| + |\beta_j| = \pi - |\gamma_2| + \pi - |\gamma_1| > \pi$.

$P_{i(j)}$ parallel zu denen von $\varphi_{i(j)}(R)$. Damit hat $P_{i(j)}$ dieselben Winkelgrößen wie $\varphi_{i(j)}(R)$. Daraus folgt die Behauptung $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$, da α_j und β_j in diesem Fall einen Winkel der Größe $\frac{3\pi}{5}$ zwischen sich haben (der in der eingeschlossenen Ecke von P liegt, siehe Abbildung 4.1b).

Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen von oben $|\gamma_1| + |\gamma_3| > \pi$ in $\varphi_{i(j)}(R)$ gilt. Diese Aussage wurde bereits in [2, Lemma 3 (iii)] bewiesen, soll der Vollständigkeit halber hier aber noch einmal gezeigt werden:

Die Ecken von R seien mit r_1, \dots, r_5 bezeichnet und die von $\varphi_{i(j)}(R)$ mit r'_1, \dots, r'_5 . Durch die Anwendung einer geeigneten Ähnlichkeitsabbildung kann $\varphi_{i(j)}(R)$ so bewegt und vergrößert werden, dass wir $r'_1 = r_1$, $r'_2 = r_2$ und $r'_3 \in r_2r_3$ annehmen können. Nun fixieren wir einen Punkt r so, dass $r_2r_3r_5r$ ein Parallelogramm bildet (siehe Abbildung 4.4). Das Bild dieses Parallelogramms unter $\varphi_{i(j)}$ ist $r_2r'_3r'_5r$, da $\varphi_{i(j)}$ alle Punkte auf der Geraden durch r_1r_2 fest lässt. Wegen $r'_3 \in r_2r_3$ erhalten wir $r'_5 \in rr_5$, wodurch dann $|\gamma_1| \geq |\angle(r_5r_1r_2)| = \frac{3\pi}{5}$ gilt. Da $r'_3r'_5$ eine Diagonale von $\varphi_{i(j)}(R)$ ist, gilt weiterhin $|\gamma_3| > |\angle(r_2r'_3r'_5)| = \pi - |\angle(r_1r_2r_3)| = \pi - \frac{3\pi}{5}$. Durch eine Addition der beiden Abschätzungen erhalten wir die Behauptung $|\gamma_1| + |\gamma_3| > \pi$.

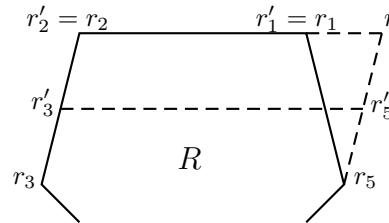


Abbildung 4.4: (zum Beweis von Satz 4.1, 2. Fall) Das Parallelogramm $r_2r_3r_5r$ und das Bild $r_2r'_3r'_5r$ unter $\varphi_{i(j)}$

3. Fall: Wir zeigen die Behauptung, dass $\varphi_{i(j)}$ in diesem Fall eine Ähnlichkeitsabbildung sein muss. Da Ähnlichkeitsabbildungen Winkel erhalten, gilt somit: $|\alpha_j| + |\beta_j| = \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} > \pi$.

Seien q_1 und q_2 zwei Ecken von P im relativ Inneren von C_j , also $q_1 = p_i$, $q_2 = p_j$ für $i, j \in \{1, \dots, 5\}$. Der Schnittpunkt der Geraden durch q_2q_3 und q_1q_5 sei mit p bezeichnet (siehe Abbildung 4.5). So entsteht ein Dreieck $q_2q_1p = p_jp_ip$. Dieses

Dreieck ist wegen gleicher Winkelgrößen zu dem Dreieck p_2p_1p' ähnlich, wenn p' analog als Schnittpunkt der Geraden durch p_2p_3 und p_1p_5 konstruiert wird. Somit ist q_2q_1p ähnlich zu p_2p_1p' , die unter $\varphi_{i(j)}$ aufeinander abgebildet werden. Da eine affine Abbildung durch drei Punkte und deren Bildpunkte eindeutig bestimmt ist, liegt hier eine Ähnlichkeitsabbildung vor.

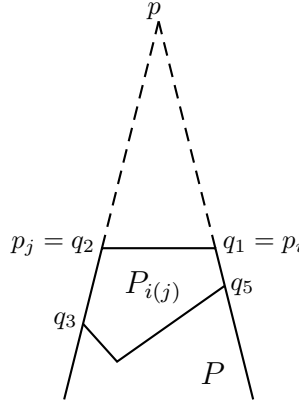


Abbildung 4.5: (zum Beweis von Satz 4.1, 3. Fall) Das Dreieck $q_2q_1p = p_jp_ip$, das ähnlich zu dem Dreieck p_2p_1p' ist, bei selber Konstruktion

Nun haben wir für alle 3 Fälle gezeigt, dass $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$ gilt. Da dies auch alle möglichen Fälle sind, erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^m (|\alpha_j| + |\beta_j|) > m\pi.$$

Andererseits haben die Fünfecke $P_{i(j-1)}$ und $P_{i(j)}$ für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ den Punkt c_j als gemeinsame Ecke, aber kein gemeinsames Inneres. Somit gilt $|\beta_{j-1}| + |\alpha_j| \leq \pi$ (der $<$ Fall entsteht, wenn c_j eine Ecke von P oder von einem weiteren P_k ist) und folglich:

$$\sum_{j=1}^m (|\alpha_j| + |\beta_j|) \leq m\pi,$$

was den gewünschten Widerspruch zur vorherigen Formel darstellt. \square

Nun stellte sich die Frage, ob es möglich ist, nicht nur die Kantenlängen des Fünfecks zu variieren, sondern auch die Winkelgrößen. Dies ist offenbar nur in einem gewissen Bereich möglich, da es wie bereits erwähnt ein selbstaffines Fünfeck gibt.

In den weiteren Überlegungen ist noch nicht alles formell bewiesen, so dass diese nicht als Satz formuliert werden sollten. Dennoch geben sie eine erste Idee, inwieweit die Winkelgrößen von den bisherigen 108° abweichen können. Das Ziel ist zu zeigen, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass jedes konvexe Fünfeck, dessen Innenwinkelgrößen zwischen $108^\circ - \varepsilon$ und $108^\circ + \varepsilon$ liegen, nicht selbstaffin ist. Im besten Fall sollte dieses ε noch berechnet werden.

Die Idee dabei ist, das Beweisprinzip des letzten Satzes wieder anwenden zu können. Deshalb werden alle festgelegten Bezeichnungen und anfänglichen Überlegungen weiterhin verwendet und nicht noch einmal genannt. Wiederum gilt es

nun für die folgenden Fälle zu zeigen, dass in einem beliebigen aber festen $P_{i(j)}$ $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$ gilt (Beispiele siehe Abbildung 4.1 und für den 4. Fall in Abbildung 4.8). Der Widerspruch würde dann analog zum letzten Beweis entstehen.

- 1. Fall: C_j enthält keine Ecke von P in seinem relativ Inneren
- 2. Fall: C_j enthält genau eine Ecke von P in seinem relativ Inneren
- 3. Fall: C_j enthält genau zwei Ecken von P in seinem relativ Inneren
- 4. Fall: C_j enthält genau drei Ecken von P in seinem relativ Inneren
- Dass C_j vier oder fünf Ecken von P in seinem relativ Inneren enthält, ist nur möglich, wenn $P = P_{i(j)}$ gilt

1. Fall: Wenn wir voraussetzen, dass $\varepsilon < 18^\circ$ ist, sind alle aufeinanderfolgenden Winkel von P in der Summe größer als 180° . Damit entsteht wieder ein Dreieck, wie im 1. Fall des Beweises von Satz 4.1 beschrieben, und der Fall kann analog bewiesen werden.

2. Fall: Versuche, diesen Fall formell zu beweisen, haben leider noch nicht funktioniert. Deshalb wählte ich die Variante ein Programm in Matlab zu schreiben, das die gewünschte Winkelgrößensumme $|\alpha_j| + |\beta_j|$ berechnet (siehe Anlage 1). In Abhängigkeit von mehreren Variablen wollte ich dann den größtmöglichen Wert für ε bestimmen, bei dem noch $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$ gilt. Nun wird zunächst das Vorgehen genauer erklärt und im Anschluss werden die Ergebnisse genannt. Anhand von Abbildung 4.6 wird im Folgenden beschrieben, was aus welchen Größen berechnet werden soll.

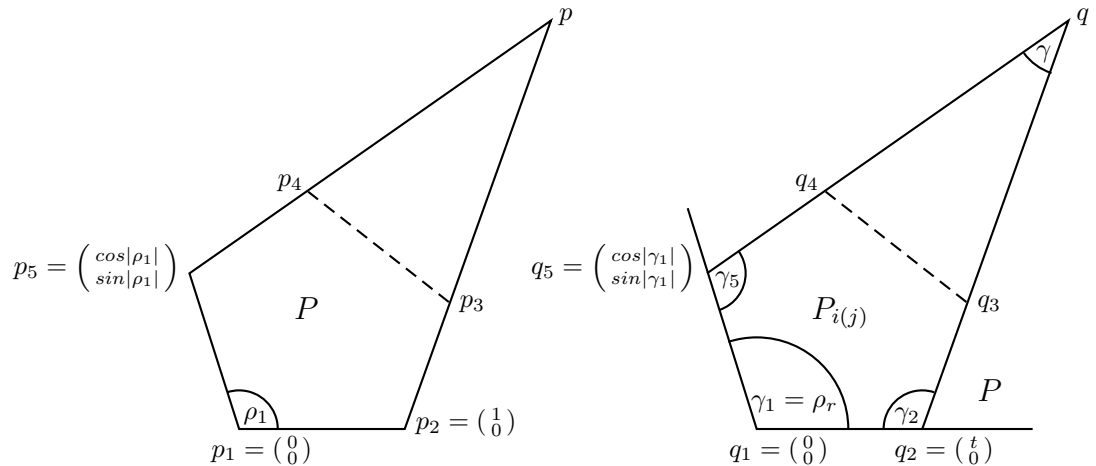


Abbildung 4.6: P und $P_{i(j)}$ in einer Ecke von P mit den festgelegten Koordinaten und Winkeln

Zunächst einmal können wir voraussetzen, dass die Kanten p_1p_2 und p_1p_5 von P die Länge 1 haben, da dies keine Auswirkung auf die Winkelgrößen hat, denn: Wenn man ein Fünfeck R so wählt, dass die Kanten parallel zu denen von P sind und Länge 1 haben, dann sind die Kanten von $P_{i(j)}$ parallel zu denen von

$\varphi_{i(j)}(R)$, da die Bilder paralleler Geraden wieder parallel sind. Damit hat $P_{i(j)}$ dieselben Winkel wie $\varphi_{i(j)}(R)$.

Die Winkel in den Ecken p_l von P seien mit ρ_l bezeichnet, wobei $|\rho_l| = \frac{3\pi}{5} + \varepsilon_l$ gilt, mit $-\varepsilon \leq \varepsilon_l \leq \varepsilon$, $k = 1, \dots, 5$. Die Winkel in den Ecken q_l von $P_{i(j)}$ seien mit γ_l bezeichnet. Sei q_1 die eine Ecke von P im relativ Inneren von C_j , das heißt $|\gamma_1| = |\rho_r|$ für ein $r \in \{1, \dots, 5\}$. Über die anderen Winkelgrößen von $P_{i(j)}$ können wir jedoch noch keine Aussagen machen.

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $p_1 = (0, 0)^T$ gilt. Durch oben beschriebene Argumentation können wir dann $p_2 = (1, 0)^T$ und $p_5 = (\cos|\rho_1|, \sin|\rho_1|)^T$ setzen.

$P_{i(j)}$ kann, durch geeignete Anwendung einer Ähnlichkeitsabbildung, so normiert werden, dass $q_1 = (0, 0)^T$ und $q_2 = (t, 0)^T$, für ein $t \in \mathbb{R}$, gilt und die Kante q_1q_5 Länge 1 hat. Damit können q_5 die Koordinaten $(\cos|\gamma_1|, \sin|\gamma_1|)^T$ zugeordnet werden.

Die Abbildung $\varphi_{i(j)}$ ist durch p_1, p_2, p_5 und die Bildpunkte q_1, q_2, q_5 gegeben und eindeutig bestimmt. Zusammenfassend soll also gelten:

$$\begin{aligned}\varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} \cos|\rho_1| \\ \sin|\rho_1| \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \cos|\gamma_1| \\ \sin|\gamma_1| \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt p sei der Schnittpunkt der Geraden durch die Kanten p_2p_3 und p_4p_5 und q der Schnittpunkt der Geraden durch q_2q_3 und q_4q_5 (siehe Abbildung 4.6). Der Winkel in q sei mit γ bezeichnet.

Wir wollen erreichen, dass $|\alpha_j| + |\beta_j| = |\gamma_2| + |\gamma_5| > \pi$ gilt. Dazu betrachten wir das Viereck $q_1q_2qq_5$ und können stattdessen $|\gamma_1| + |\gamma| < \pi$ fordern. Somit ist das Problem übertragbar in eine Nullstellensuche des im Folgenden definierten k :

$$k := \pi - |\gamma_1| - |\gamma|.$$

Solange $k > 0$ gilt, ist $|\gamma_2| + |\gamma_5| > \pi$.

Für die Berechnung von k wird $|\gamma|$ benötigt und dafür die Koordinaten des Punktes q , der sich als Bildpunkt von p ergibt. Das heißt, wir berechnen zunächst die Koordinaten von p , dann die Abbildung $\varphi_{i(j)}$ und mit diesen beiden dann $q = \varphi_{i(j)}(p)$ und $|\gamma|$.

p ergibt sich als Schnittpunkt der beiden folgenden Geraden g_1, g_2 durch die Kanten p_2p_3 und p_4p_5 :

$$\begin{aligned}g_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_2) \\ \sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_2) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ g_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \cos|\rho_1| \\ \sin|\rho_1| \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos(|\rho_1| - \frac{2\pi}{5} + \varepsilon_5) \\ \sin(|\rho_1| - \frac{2\pi}{5} + \varepsilon_5) \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Durch Gleichsetzung erhält man die Koordinaten von p , die ich jedoch nur mit Matlab berechnet habe und hier nicht extra angeben möchte.

Die Abbildung $\varphi_{i(j)}$ ergibt sich durch die oben genannte Zuordnung wie folgt: Gesucht ist die Matrix A und das $v \in \mathbb{R}^2$, so dass $\varphi_{i(j)}$ darstellbar ist als $\varphi_{i(j)}(x) = Ax + v$. Durch Einsetzen der gegebenen Punkte erhält man die folgende Abbildungsgleichung:

$$\varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t & \frac{\cos|\gamma_1| - t \cdot \cos|\rho_1|}{\sin|\rho_1|} \\ 0 & \frac{\sin|\gamma_1|}{\sin|\rho_1|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist q mit $q = \varphi_{i(j)}(p)$ gegeben und $|\gamma|$ kann berechnet werden:

$$\cos|\gamma| = \frac{\langle \overrightarrow{qq_5}, \overrightarrow{qq_2} \rangle}{|\overrightarrow{qq_5}| \cdot |\overrightarrow{qq_2}|}.$$

Mit diesen Überlegungen war es dann möglich, ein Programm in Matlab zu schreiben, das k berechnet, bei gegebenen Variablen ε_1 (für $|\rho_1|$), ε_r (da $|\gamma_1| = |\rho_r|$ für ein $r \in \{1, \dots, 5\}$), ε_2 , ε_5 und t .

Da eine Nullstellensuche in Matlab für eine Funktion, die von mehreren Variablen abhängt, nicht möglich ist, habe ich zunächst eine Vermutung aufgestellt und diese dann überprüft.

Die Vermutung ist einerseits dadurch entstanden, dass ich mir geometrisch überlegt habe, was für einen Einfluss die Variablen jeweils haben. Desweiteren habe ich jede Variable plotten lassen, wenn die jeweiligen anderen festgehalten worden. Da sich die Variablen aber gegenseitig bedingen, ist es zunächst nur eine Vermutung, dass die Variablen wie folgt Einfluss auf k haben:

- ε_1 : Um so kleiner ε_1 , desto kleiner k
- ε_r : Um so größer ε_r , desto kleiner k
- ε_2 : Um so kleiner ε_2 , desto kleiner k
- ε_5 : Um so kleiner ε_5 , desto kleiner k
- t : Für $t = 1$ ist k am kleinsten, wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon_5$, was ist bei einer Optimierung dieser beiden Variablen der Fall ist

Dabei ist der Einfluss der ersten vier Variablen nur in einem ausreichenden Bereich um Null so wie beschrieben.

Diese Vermutungen habe ich verwendet, um eine Funktion zu schreiben, die ausschließlich von der Variable ε abhängt (siehe Anlage 2). Dazu wurden $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_5 = -\varepsilon$, $\varepsilon_r = +\varepsilon$ und $t = 1$ gesetzt. Da diese Funktion nur von ε abhängt, ist es möglich die Nullstelle berechnen zu lassen. Diese lag bei $\varepsilon = 0,1079$. Somit ist $k > 0$ für $\varepsilon \leq 0,1078$. Dies würde bedeuten, dass unsere Aussage für diesen Fall für einen Winkelgrößenbereich von rund $101,83^\circ$ bis $114,17^\circ$ gelten würde.

Diese Vermutung konnte ich, durch eine Berechnung des Minimums von k in dem vermuteten Bereich, bestätigen. Mit der speziellen Matlab-Funktion „fminsearchbnd“ kann das Minimum einer Funktion von mehreren Variablen in einem

gewünschten Bereich berechnet werden, wobei es möglich ist, für jede Variable einen eigenen Bereich zu wählen. Somit konnte ich $-0,1078 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_r, \varepsilon_2, \varepsilon_5 \leq 0,1078$ und $0 < t < 1.000.000.000$ wählen.

Das Minimum in diesem Bereich wurde tatsächlich für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_5 = -0,1078$, $\varepsilon_r = 0,1078$ und $t = 1$ angenommen und ist mit einem Wert von $k = 0,00054$ wirklich nur knapp über Null. 1.000.000.000 war der größtmögliche Wert für t , bei dem die Berechnung noch möglich war, aber dies sollte bei dem erwarteten Ergebnis von $t = 1$ kein Problem sein, da auch geometrisch nachvollziehbar ist, dass k für wachsendes t nicht mehr kleiner wird, sondern größer.

Zusammenfassend gilt: Für den 2. Fall ist $|\alpha_j| + |\beta_j| > \pi$, wenn die Innenwinkelgrößen von P zwischen rund $101,83^\circ$ und $114,17^\circ$ liegen.

3. Fall: Die Bezeichnungen der Eckpunkte und Winkel von P und $P_{i(j)}$ aus dem 2. Fall werden weiterhin verwendet. Jedoch werden dieses Mal die Koordinaten der Eckpunkte von P anders gewählt und sind in Abbildung 4.7 mit dargestellt. Die zwei Ecken von P im relativ Inneren von C_j seien q_1 und q_5 , das heißt $|\gamma_1| = |\rho_r|$ und $|\gamma_5| = |\rho_s|$ für $r \in \{1, \dots, 5\}$ und $s = r \pm 1$ (modulo 5).

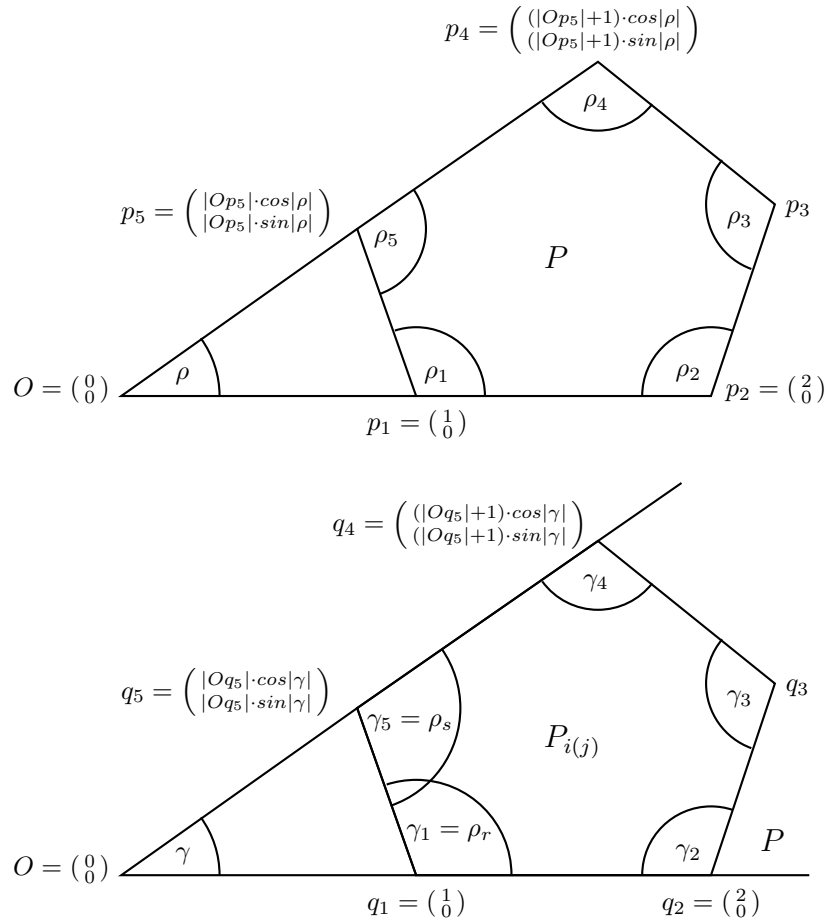


Abbildung 4.7: P und $P_{i(j)}$ mit zwei gemeinsamen Ecken und den festgelegten Koordinaten und Winkeln

Ohne Einschränkung habe p_1 die Koordinaten $(1,0)^T$ und $p_2 = (2,0)^T$. Der

Koordinatenursprung $O = (0, 0)^T$ sei der Schnittpunkt der Geraden durch p_1p_2 und p_4p_5 . Dies ist mit Hilfe der selben Argumentation wie am Anfang des 2. Falls so annehmbar. Den Winkel in O bezeichnen wir mit ρ , wobei $|\rho| = \pi - (\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_1) - (\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_5) = \frac{\pi}{5} + \varepsilon_1 + \varepsilon_5$ gilt.

Der Abstand von p_5 zum Koordinatenursprung O kann mit Hilfe des Sinussatzes wie folgt berechnet werden:

$$\frac{|Op_5|}{\sin(\pi - |\rho_1|)} = \frac{|Op_1|}{\sin(\pi - |\rho_5|)}$$

Daraus folgt in unserem Fall:

$$|Op_5| = \frac{\sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_1)}{\sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_5)}$$

Damit hat p_5 die Koordinaten $(|Op_5| \cdot \cos|\rho|, |Op_5| \cdot \sin|\rho|)^T$.

Für die Kante p_4p_5 kann ebenfalls eine Länge von 1 angenommen werden, da bei unseren Überlegungen nur die Winkelgrößen eine Rolle spielen. Somit ist p_4 durch $((|Op_5| + 1) \cdot \cos|\rho|, (|Op_5| + 1) \cdot \sin|\rho|)^T$ gegeben.

Analog sind die Koordinaten in $P_{i(j)}$ wählbar, wenn gegebenenfalls eine geeignete Ähnlichkeitsabbildung angewendet wird. Wir wählen also $q_1 = (1, 0)^T$, $q_2 = (2, 0)^T$, $q_5 = (|Oq_5| \cdot \cos|\gamma|, |Oq_5| \cdot \sin|\gamma|)^T$ und den Koordinatenursprung $O = (0, 0)^T$ wieder im Schnittpunkt der Geraden durch q_1q_2 und q_4q_5 . Der Winkel in O sei mit γ bezeichnet.

Nun ist die Länge der Strecke $|Oq_5|$ durch den Sinussatz analog gegeben durch:

$$|Oq_5| = \frac{\sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_r)}{\sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_s)}.$$

In diesem Fall soll also gelten: $|\alpha_j| + |\beta_j| = |\gamma_2| + |\gamma_4| > \pi$.

Die Abbildung $\varphi_{i(j)}$ ist durch die Punkte O , p_1 und p_5 und ihre Bildpunkte gegeben:

$$\begin{aligned} \varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} |Op_5| \cdot \cos|\rho| \\ |Op_5| \cdot \sin|\rho| \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} |Oq_5| \cdot \cos|\gamma| \\ |Oq_5| \cdot \sin|\gamma| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das heißt, das Dreieck Op_1p_5 wird auf das Dreieck Oq_1q_5 abgebildet. Im ersten Dreieck gibt es Winkel der Größe $\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_1$ und $\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_5$, im zweiten $\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_r$ und $\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_s$. Die jeweils dritte Winkelgröße bestimmt sich durch die beiden angegebenen. Dabei gilt: $-\varepsilon \leq \varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_r, \varepsilon_s \leq \varepsilon$ für ein geeignetes ε . Wenn dieses ε klein genug gewählt wird, ändern sich die Winkelgrößen unter $\varphi_{i(j)}$ folglich nur sehr wenig. Damit ändern sich auch die Winkelgrößen von ρ_2 und ρ_4 unter $\varphi_{i(j)}$ nur in einem gewissen Bereich. Es muss somit ein ε geben, so dass diese größer $\frac{\pi}{2}$

bleiben, also um nicht mehr als 18° kleiner werden. Damit gilt dann: $\gamma_2 + \gamma_4 > \pi$. Ob jedoch $\varepsilon = 0,1078$ möglich ist (der Maximalwert aus dem 2. Fall), ist damit noch nicht klar. Um dies herauszubekommen, habe ich wiederum Matlab verwendet. Leider gibt es für diesen Fall (noch) kein optimales Ergebnis, für welches ε es möglich ist zu zeigen, dass $\gamma_2 + \gamma_4 > \pi$ gilt. Ich habe jedoch festgestellt, dass $\varepsilon = 0,1078$ zu groß ist und dass es für $\varepsilon = 0,0556$ aber funktioniert. Die dafür geschriebene Matlab-Funktion ist ähnlich aufgebaut wie im 2. Fall (siehe Anlage 3). Jedoch werden abgeänderte Werte und mehr Variablen benötigt. Die Abbildungsvorschrift ist über die oben genannten Punkte nun gegeben durch:

$$\varphi_{i(j)}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{|Oq_5| \cdot \cos|\gamma| - |Op_5| \cdot \cos|\rho|}{|Op_5| \cdot \sin|\rho|} \\ 0 & \frac{|Oq_5| \cdot \sin|\gamma|}{|Op_5| \cdot \sin|\rho|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich wie im 2. Fall habe ich dann das Viereck $Oq_2q_3q_4$ betrachtet und für folgendes k soll nun $k > 0$ gelten:

$$k := \pi - |\gamma| - |\gamma_3|,$$

wobei dieses Mal $|\gamma| = \frac{\pi}{5} + \varepsilon_r + \varepsilon_s$ gegeben ist und $|\gamma_3|$ berechnet werden muss. Um dies tun zu können, werden die Koordinaten des Punktes q_3 benötigt. Diese ergeben sich durch $\varphi_{i(j)}(p_3)$. p_3 ist der Schnittpunkt der beiden folgenden Geraden g_1, g_2 durch die Kanten p_2p_3 und p_3p_4 :

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_2) \\ \sin(\frac{2\pi}{5} - \varepsilon_2) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} (|Op_5| + 1) \cdot \cos|\rho| \\ (|Op_5| + 1) \cdot \sin|\rho| \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{5} + \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5) \\ \sin(-\frac{\pi}{5} + \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5) \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Desweiteren müssen $q_2 = \varphi_{i(j)}(p_2)$ und $q_4 = \varphi_{i(j)}(p_4)$ bestimmt werden, um dann $|\gamma_3|$ wie folgt berechnen zu können:

$$\cos|\gamma_3| = \frac{\langle \overrightarrow{q_3q_4}, \overrightarrow{q_3q_2} \rangle}{|\overrightarrow{q_3q_4}| \cdot |\overrightarrow{q_3q_2}|}.$$

Die Berechnung von k hängt somit von den Variablen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_r$ und ε_s ab (da $|\gamma_1| = |\rho_r|$ und $|\gamma_5| = |\rho_s|$). Diese bedingen sich jedoch gegenseitig, einerseits da ε_3 durch $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5$ eindeutig bestimmt ist und ebenfalls $-\varepsilon \leq \varepsilon_3 \leq +\varepsilon$ gelten muss, andererseits muss $\varepsilon_r \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5\}$ sein und dann $\varepsilon_s \in \{\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_{i+1}\}$. Dadurch ist es leider noch nicht gelungen, den Maximalwert für ε zu bestimmen.

Es ist jedoch sicher, dass $\varepsilon = 0,1078$ zu groß ist, da bei der folgenden Wahl, die auch möglich ist, nur $|\gamma_2| + |\gamma_4| = 3,0323 < \pi$ gilt: $\varepsilon_1 = -0,1078, \varepsilon_2 = 0,1078, \varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = -0,1078, \varepsilon_r = 0,1078$ und $\varepsilon_s = 0,1078$ ($\varepsilon_r, \varepsilon_s \in \{\varepsilon_3, \varepsilon_2\}$, da dann $\varepsilon_3 = 0,1078$ gilt).

Anhand von Überlegungen, welchen Einfluss die einzelnen Variablen haben und

dass $\sum_{k=1}^5 \varepsilon_k = 0$ gelten muss, habe ich nun versucht, eine Funktion in Matlab zu schreiben, die wiederum nur von einer Variable ε abhängt. Die daraus entstandene Vermutung liefert einen Wert von $\varepsilon = 0,0726 \approx 4,16^\circ$. Jedoch ist es leider (noch) nicht gelungen, diese Vermutung sicher bestätigen zu können.

Bei dem selben Verfahren der Berechnung des Minimums wie im 2. Fall habe ich Werte erhalten, die $k < 0$ liefern, die aber wohl durch die oben genannten Einschränkungen nicht realisierbar sind. Um dieses Verfahren dennoch anwenden zu können, habe ich ein kleineres ε gesucht, so dass das Minimum gerade noch ein positives k liefert. Das Minimum wird dann zwar durch einen Fall angenommen, der nicht realisierbar ist, aber dennoch wissen wir so, dass in diesem Bereich $|\gamma_2| + |\gamma_4| > \pi$ gilt. Das Ergebnis dieser Berechnung ist $\varepsilon = 0,0556 \approx 3,18^\circ$. Das heißt, dass dieser Fall für Innenwinkelgrößen zwischen rund $104,82^\circ$ und $111,18^\circ$ behandelt wäre.

4. Fall: Wenn es genau drei Ecken von P im relativ Inneren von C_j gibt, ist die Summe der Winkelgrößen in den darinliegenden Winkeln höchstens $3 \cdot (\frac{3\pi}{5} + \varepsilon)$. Damit beträgt die Winkelgrößensumme der beiden anderen Winkel, die in diesem Fall $|\alpha_j| + |\beta_j|$ entspricht (siehe Abbildung 4.8), mindestens:

$$|\alpha_j| + |\beta_j| \geq 3\pi - 3 \cdot \left(\frac{3\pi}{5} + \varepsilon \right) = \frac{6\pi}{5} - 3\varepsilon.$$

Das heißt, bei einer Wahl von $\varepsilon < \frac{\pi}{15} = 12^\circ$ ist dieser Fall gezeigt und stellt keine weitere Einschränkung dar.

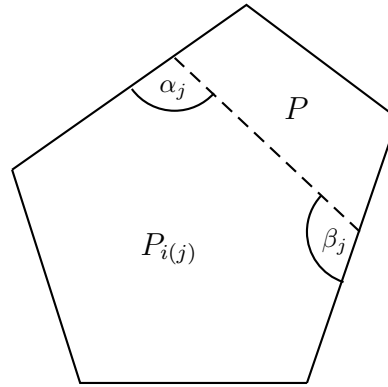


Abbildung 4.8: Der 4. Fall

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass jedes Fünfeck, dessen Innenwinkelgrößen zwischen $108^\circ - \varepsilon$ und $108^\circ + \varepsilon$ liegen, nicht selbstaffin ist. Eine Wahl für ε ist dabei $\varepsilon = 3,18^\circ$. Es besteht weiterhin die Vermutung, dass $\varepsilon = 4,16^\circ$ ebenfalls ein möglicher Wert ist.

Desweiteren bleibt es spannend, ob es eventuell auch möglich ist, für ganz andere Winkelbereiche zu zeigen, dass das entsprechende Fünfeck nicht selbstaffin ist.

4.2 Selbstähnliche Fünfecke

Es besteht folgende Vermutung:

Vermutung 4.2. Kein konvexes Fünfeck ist selbstähnlich.

Dies konnte zwar noch nicht gezeigt werden, aber es gibt bereits viele Einschränkungen.

In [3, Satz 2.22] wird bewiesen, dass ein Fünfeck höchstens dann selbstähnlich ist, wenn es Innenwinkel der Größe $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$ hat und diese auch in der genannten Reihenfolge vorkommen.

In [2, Proposition 5] wird die Existenz eines sogenannten orientierungserhaltend selbstähnlichen Fünfecks widerlegt.

Ein konvexer Körper K ist *orientierungserhaltend selbstähnlich*, wenn Ähnlichkeitsabbildungen $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, k$, existieren, welche die Orientierung von K erhalten und $\varphi_1(K), \dots, \varphi_k(K)$ dann eine Zerlegung von K ist.

Dieser Satz wird hier noch einmal gezeigt, da die Beweisidee als Ansatz für weitere Überlegungen dient.

Satz 4.3. Kein konvexes Fünfeck ist orientierungserhaltend selbstähnlich.

Beweis. Wir nehmen an, dass P ein orientierungserhaltend selbstähnliches Fünfeck ist, welches in die Fünfecke P_1, \dots, P_k zerlegt ist. Dabei sei $\varphi_i(P)$ mit P_i bezeichnet für $i = 1, \dots, k$, wenn φ_i Ähnlichkeitsabbildungen sind, welche die Orientierung von P erhalten. Die Ecken von P seien mit p_1, \dots, p_5 bezeichnet und die dazugehörigen Winkel mit $|\alpha_1| = \frac{\pi}{3}$, $|\alpha_2| = \frac{\pi}{2}$, $|\alpha_3| = \frac{2\pi}{3}$, $|\alpha_4| = \frac{5\pi}{6}$, $|\alpha_5| = \frac{2\pi}{3}$ (siehe Abbildung 4.9).

Die Ecke p_1 muss zu einem Fünfeck P_i gehören, sei dies ohne Einschränkung P_1 . φ_1 ist eine Streckung mit Streckungszentrum p_1 , da alle anderen Winkel von P größer sind als $|\alpha_1| = \frac{\pi}{3}$ und da φ_1 die Orientierung erhält. Somit muss die Ecke $\varphi_1(p_1)$ mit p_1 übereinstimmen und $\varphi_1(p_5)$ ein relativ innerer Punkt der Kante p_1p_5 sein.

Der Rest von P , $P \setminus P_1$, hat in diesem Punkt einen Winkel der Größe $\pi - |\alpha_5| = \frac{\pi}{3}$. So muss mit selber Argumentation wie vorher dieser Punkt zu einem weiteren Fünfeck, ohne Einschränkung P_2 , gehören und wieder die neue Ecke $\varphi_2(p_1)$ mit der Ecke $\varphi_1(p_5)$ übereinstimmen, da die Winkel der anderen Ecken alle größer sind. Die Ecke $\varphi_2(p_5)$ kann entweder mit der Ecke p_5 von P übereinstimmen oder wieder ein relativ innerer Punkt der Kante p_1p_5 sein. Im letzten Fall führen wir die Argumentation so lange fort, bis die Kante p_1p_5 komplett überdeckt, ist mit Fünfecken P_1, \dots, P_l mit $\varphi_l(p_5) = p_5$, für ein $l \in \{1, \dots, k\}$ (siehe Abbildung 4.9).

φ_l ist eine Streckung mit Streckungszentrum p_5 und einem Streckungsfaktor der kleiner als 1 ist. Infolgedessen muss die Ecke $\varphi_l(p_4)$ ein relativ innerer Punkt der Kante p_4p_5 sein und $P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l)$ hat in diesem Punkt einen Winkel der Größe $\pi - |\alpha_4| = \frac{\pi}{6}$. Da jedoch alle verbleibenden Zerlegungsstücke P_i nur größere Winkel besitzen, kann P durch diese nicht weiter überdeckt werden. Somit erhal-

ten wir einen Widerspruch zu der Annahme, dass P ein orientierungserhaltend selbstähnliches Fünfeck ist. \square

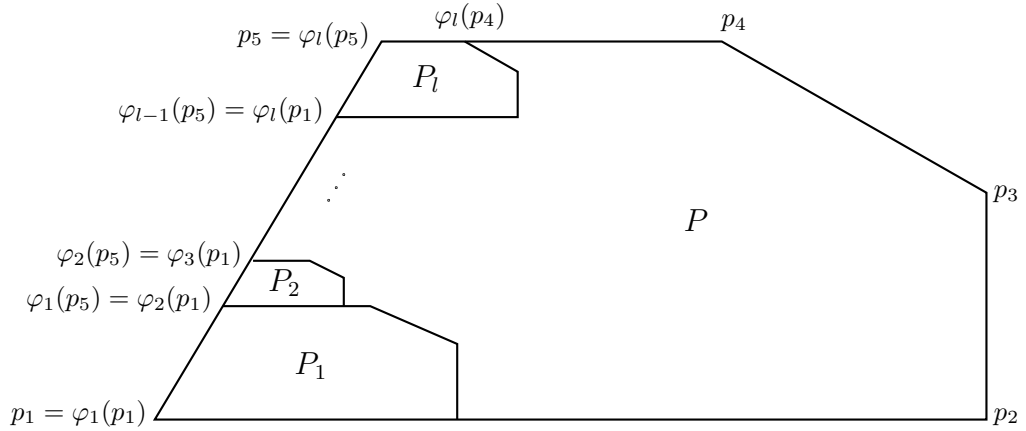


Abbildung 4.9: (zum Beweis von Satz 4.3) Die Zerlegung der Kante p_1p_5 eines orientierungserhaltend selbstähnlichen Fünfecks hätte diese Gestalt.

Nun werden wir zeigen, dass die Aussage des vorherigen Satzes noch verschärft werden kann:

Satz 4.4. Wenn $\varphi_1(P), \dots, \varphi_k(P)$ eine selbstähnliche Zerlegung eines konvexen Fünfecks P ist, mit Ähnlichkeitsabbildungen φ_i , dann können die Fünfecke $\varphi_i(P)$ nicht alle gleichorientiert sein.

Beweis. Wir bezeichnen wieder $\varphi_i(P)$ mit P_i für $i = 1, \dots, k$. Die Variante, dass alle P_i gleichorientiert sind wie P , wurde in Satz 4.3 betrachtet und widerlegt. Nun ist somit noch zu zeigen, dass die Fünfecke P_i nicht alle andersherum orientiert als P sein können. Dafür werden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 4.3 weiter verwendet und Beweisschritte, die analog geführt werden, nicht noch einmal ausformuliert. Anschaulich ist der Beweis in Abbildung 4.10 dargestellt.

Wir fangen wieder damit an, die Ecke p_1 von P zu betrachten. Diese muss zu einem Fünfeck P_i gehören, sei dies ohne Einschränkung P_1 . Wie bereits erklärt muss dann die Ecke $\varphi_1(p_1)$ mit p_1 übereinstimmen. P_1 ist jetzt andersherum orientiert als P und es kann nicht $\varphi_1(p_2) = p_5$ gelten, da $P \setminus P_1$ sonst einen Winkel der Größe $|\alpha_5| - |\alpha_2| = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$ hätte, jedoch kein Fünfeck P_2, \dots, P_k einen Winkel dieser Größe besitzt. Das heißt, die Ecke $\varphi_1(p_2)$ muss ein relativ innerer Punkt der Kante p_1p_5 sein. In diesem Punkt hat $P \setminus P_1$ einen Winkel der Größe $\pi - |\alpha_2| = \frac{\pi}{2}$. Dieser Punkt muss zu einem weiteren Fünfeck gehören, ohne Einschränkung P_2 , und mit der neuen Ecke $\varphi_2(p_2)$ übereinstimmen, da alle anderen Ecken keinen Winkel der Größe $\frac{\pi}{2}$ haben. Die Ecke $\varphi_2(p_3)$ kann entweder mit der Ecke p_5 von P übereinstimmen oder wieder ein relativ innerer Punkt der Kante p_1p_5 sein.

Im zweiten Fall hat $P \setminus (P_1 \cup P_2)$ in diesem Punkt einen Winkel der Größe $\pi - |\alpha_3| = \frac{\pi}{3}$. Somit muss dieser Punkt mit der neuen Ecke $\varphi_3(p_1)$ übereinstim-

men, wenn P_3 das nächste Fünfeck ist, zu dem $\varphi_2(p_3)$ gehört.

Wegen der Orientierung von P_3 ist $\varphi_3(p_2)$ der nächste Punkt, der wegen obiger Argumentation nicht mit p_5 übereinstimmen kann und somit im relativ Inneren der Kante p_1p_5 liegt. Im diesem Fall hat $P \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$ einen Winkel der Größe $\pi - |\alpha_2| = \frac{\pi}{2}$, so dass die Ecken $\varphi_3(p_2)$ und $\varphi_4(p_2)$ übereinstimmen müssen, wenn P_4 das nächste Fünfeck ist.

Somit sind wir wieder am Anfang unserer Argumentation und zusammenfassend gilt: Wenn die Kante p_1p_5 irgendwann vollständig von Fünfecken P_1, \dots, P_l überdeckt ist, für ein $l \in \{1, \dots, k\}$, so gilt:

$$\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1(p_1), \\ \varphi_1(p_2) &= \varphi_2(p_2), \\ \varphi_2(p_3) &\in \{\varphi_3(p_1), p_5\}, \\ &\dots, \\ \varphi_{2j}(p_3) &\in \{\varphi_{2j+1}(p_1), p_5\}, \\ \varphi_{2j+1}(p_2) &= \varphi_{2j+2}(p_2), \\ &\dots, \\ \varphi_{l-1}(p_2) &= \varphi_l(p_2), \\ \varphi_l(p_3) &= p_5, \end{aligned}$$

für $j \in \{1, \dots, \frac{l}{2} - 1\}$.

Für das Verständnis dieser Gleichungen sollte die Abbildung 4.10 ebenfalls hilfreich sein.

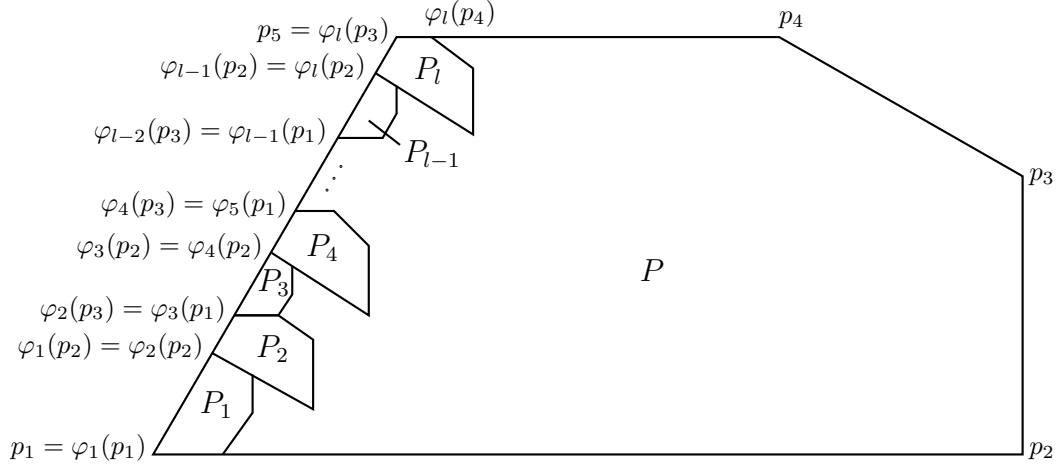


Abbildung 4.10: (zum Beweis von Satz 4.4) Die Zerlegung der Kante p_1p_5 eines selbstähnlichen Fünfecks, in dem die Fünfecke P_1, \dots, P_k alle gleichorientiert sind, hätte diese Gestalt (es kann jedoch auch schon $P_2 = P_l$ oder $P_4 = P_l$ gelten).

Wegen $\varphi_l(p_3) = p_5$ und der Orientierung von P_l ist $\varphi_l(p_4)$ der nächste zu betrachtende Punkt. Für diesen können folgende Fälle eintreten:

- $\varphi_l(p_4)$ ist ein relativ innerer Punkt der Kante p_4p_5 (wie in Abbildung 4.10): Dann hat $P \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_l)$ in diesem Punkt einen Winkel der Größe

$\pi - |\alpha_4| = \frac{\pi}{6}$. Da jedoch alle Fünfecke P_i nur größere Winkel besitzen, kann P durch diese nicht weiter überdeckt werden. Somit erhalten wir für diesen Fall einen Widerspruch.

- es gilt $\varphi_l(p_4) = p_4$ und $\varphi_l(p_5)$ ist ein relativ innerer Punkt der Kante p_3p_4 (siehe Abbildung 4.11):

Dann ist an dieser Kante aber dieselbe Argumentation wie oben für die Kante p_1p_5 führbar. Am Ende gilt dann somit $\varphi_m(p_3) = p_3$ für ein $m \in \{l+1, \dots, k\}$. Dieses Mal kann dann jedoch nur der erste Fall, dass $\varphi_m(p_4)$ ein relativ innerer Punkt der Kante p_2p_3 ist, eintreten und dieser wurde bereits zum Widerspruch geführt. Die anderen beiden Fälle (der gerade beschriebene und der nächste) können nicht eintreten, da $\varphi_m(p_4) = p_2$ wegen den Winkelgrößen von $\frac{5\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{2}$ nicht gelten kann.

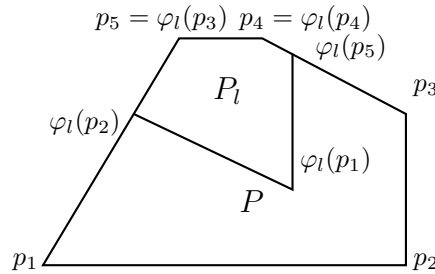


Abbildung 4.11: (zum Beweis von Satz 4.4) Wenn $\varphi_l(p_3) = p_5$ und $\varphi_l(p_4) = p_4$ gilt, würde P_l ungefähr so in P liegen.

- es gilt $\varphi_l(p_4) = p_4$ und $\varphi_l(p_5) = p_3$ (siehe Abbildung 4.12):
Dann gilt somit $p_3p_4 = \varphi_l(p_5)\varphi_l(p_4)$ und $p_4p_5 = \varphi_l(p_4)\varphi_l(p_3)$. Das heißt, auch die Längen dieser Kanten sind gleich. Dies nutzen wir aus, um zu zeigen, dass auch dieser Fall nicht möglich ist:
Sei a der Ähnlichkeitsfaktor der Abbildung φ_l . Dann gilt:

$$\begin{aligned} |p_4p_5| \cdot a &= |\varphi_l(p_4)\varphi_l(p_5)| = |p_4p_3| = \frac{|\varphi_l(p_4)\varphi_l(p_3)|}{a} = \frac{|p_4p_5|}{a} \\ \Rightarrow |p_4p_5| \cdot a &= \frac{|p_4p_5|}{a} \\ \Leftrightarrow a &= 1 \end{aligned}$$

Dann würde jedoch $P_l = P$ gelten.

□

Bei den Beweisen der letzten beiden Sätze wurde immer von der Kante p_1p_5 ausgegangen. Damit stellt sich nun die Frage, ob eventuell auch die anderen Kanten nicht durch Fünfecke zerlegt werden können, die entlang dieser untereinander gleichorientiert sind. Dies konnte jedoch nicht bestätigt werden, da jeweils Zerlegungsvarianten existieren. Eine mögliche Zerlegung der Kante p_1p_2 ist in Abbildung 4.13 zu sehen, von den Kanten p_2p_3 und p_3p_4 in Abbildung 4.14 und von der Kante p_4p_5 in Abbildung 4.15.

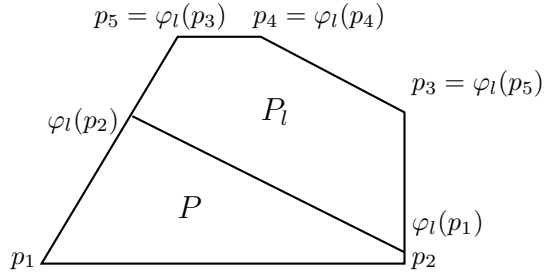


Abbildung 4.12: (zum Beweis von Satz 4.4) Wenn $\varphi_l(p_3) = p_5$, $\varphi_l(p_4) = p_4$ und $\varphi_l(p_5) = p_3$ gilt, würde P_l so in P liegen. Dies ist jedoch mit einer Ähnlichkeitsabbildung φ_l nicht möglich.

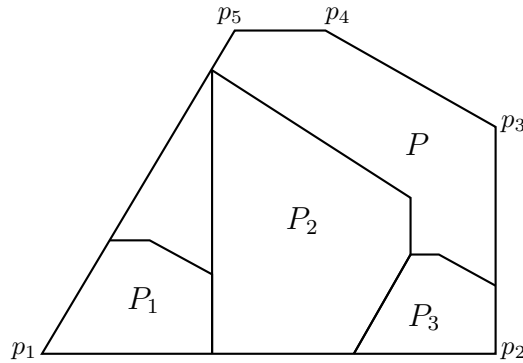


Abbildung 4.13: Eine selbstähnliche Zerlegungsmöglichkeit der Kante p_1p_2 in gleichorientierte Fünfecke P_1, P_2, P_3

Ob wirklich kein selbstähnliches Fünfeck existiert, bleibt eine offene Frage. Für diejenigen, die gerne weitere Überlegungen anstellen möchten, sei jedoch noch erwähnt, dass ein Gegenbeweis nicht nur über die Winkelgrößen geführt werden kann. Eine gleichwinklige Zerlegung eines Fünfecks mit den genannten Winkelgrößen $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$ ist in [3, Abbildung 2.34] gegeben, die Fünfecke sind dabei jedoch nicht ähnlich zum Ausgangsfünfeck.

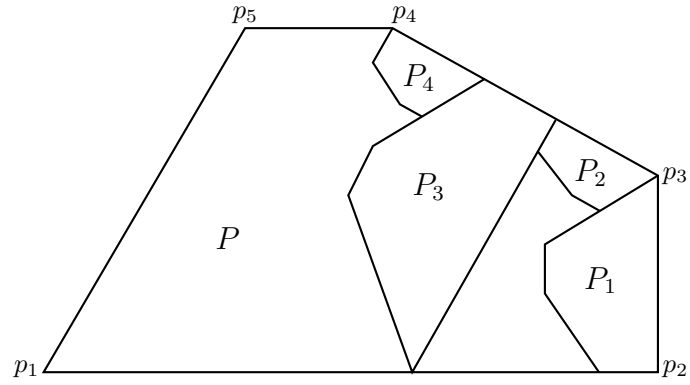


Abbildung 4.14: Eine selbstähnliche Zerlegungsmöglichkeit der Kanten p_2p_3 und p_3p_4 in jeweils gleichorientierte Fünfecke P_1, P_2, P_3, P_4

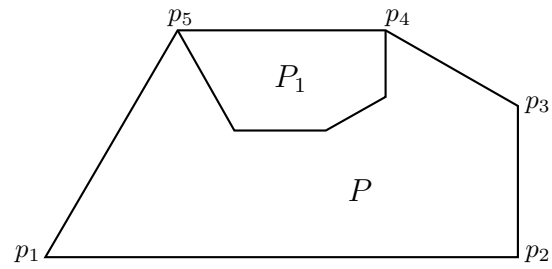


Abbildung 4.15: Eine selbstähnliche Zerlegungsmöglichkeit der Kante p_4p_5 in gleichorientierte Fünfecke, in diesem Fall reicht wieder ein Zerlegungsstück P_1

Literaturverzeichnis

- [1] Hertel, E.: *Zur Affingeometrie konvexer Polygone*. Jenaer Schriften zur Mathematik und Informatik, Math/Inf/00/22, 26 pp. <http://www.minet.uni-jena.de/Math-Net/reports/shadows/00-09report.html> (2000) (preprint)
- [2] Hertel, E., Richter, C.: *Self-affine convex polygons*. J. Geom. **98**, 79–89 (2010)
- [3] Osburg, I.: *Selbstähnliche Polyeder*. Dissertationsschrift, Fakultät für Mathematik und Informatik, Friedrich-Schiller-Universität Jena. <http://www.db-thueringen.de/servlets/DocumentServlet?id=3580> (2004)
- [4] Richter, C.: *Examples of 3-self-affine convex quadrangles*. Friedrich-Schiller-Universität Jena, Faculty of Mathematics and Computer Science, Technical Report no. 10-04, 5 pp. <http://www.minet.uni-jena.de/Math-Net/reports/shadows//10-04report.html> (2010) (preprint)
- [5] Richter, C.: *Self-affine convex discs are polygons*. Beiträge Algebra Geom. **53**, 219–224 (2012)

Anlagen

Die Matlab-Funktionen zu Kapitel 4.1:

Anlage 1

Zum 2. Fall: Die Berechnung von k aus den Variablen ε_1 , ε_r , ε_2 , ε_5 und t , die in einem Vektor e zusammengefasst sind.

```
function [k] = epsilonVektor(e)
e1=e(1);
er=e(2);
e2=e(3);
e5=e(4);
t=e(5);

z=e5+pi/5+e1;

m=(1+(cos(2*pi/5-e2).*sin(3*pi/5+e1))./sin(2*pi/5-e2)-cos(3*pi/5+e1))./
(cos(z)-cos(2*pi/5-e2).*sin(z)./sin(2*pi/5-e2)); (m ist  $\mu$  von der Gerade  $g_2$  zur
Berechnung von  $p$ , die Berechnung von  $p$  wurde nicht extra ausgeföhrt, sondern
gleich in  $\varphi_{i(j)}$  eingesetzt um  $q$  zu erhalten:)

q1=t.*(cos(3*pi/5+e1)+cos(z).*m)+(cos(3*pi/5+er)-t.*cos(3*pi/5+e1))./
sin(3*pi/5+e1).*(sin(3*pi/5+e1)+sin(z).*m); (erster Vektoreintrag von  $q$  durch
die Berechnung von  $A \cdot p$ )

q2=sin(3*pi/5+er)./sin(3*pi/5+e1).*(sin(3*pi/5+e1)+sin(z).*m); (zweiter Vek-
toreintrag von  $q$  durch die Berechnung von  $A \cdot p$ )

g=acos(((cos(3*pi/5+er)-q1).*(t-q1)+(sin(3*pi/5+er)-q2).*(-q2))./
(sqrt((cos(3*pi/5+er)-q1).*(cos(3*pi/5+er)-q1)+(sin(3*pi/5+er)-q2).
(sin(3*pi/5+er)-q2)).*sqrt((t-q1).*(t-q1)+q2.*q2)))); ( $g = \gamma$ )

k=2*pi/5-er-g; (wenn positiv haut es hin)

end
```

Anlage 2

Zum 2. Fall: Von folgender Funktion wurde das Minimum berechnet, da sie nur von einer Variable abhängt. Dabei wurden in der Funktion in Anlage 1 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_5 = -\varepsilon$, $\varepsilon_r = +\varepsilon$ und $t = 1$ gesetzt.

```
function [k] = minimumfct(e)
t=1; z=-e+pi/5-e;
m=(1+(cos(2*pi/5+e).*sin(3*pi/5-e))./sin(2*pi/5+e)-cos(3*pi/5-e))./
(cos(z)-cos(2*pi/5+e).*sin(z))./sin(2*pi/5+e));
q1=t.*(cos(3*pi/5-e)+cos(z).*m)+(cos(3*pi/5+e)-t.*cos(3*pi/5-e))./
sin(3*pi/5-e).*(sin(3*pi/5-e)+sin(z).*m);
q2=sin(3*pi/5+e)./sin(3*pi/5-e).*(sin(3*pi/5-e)+sin(z).*m);
g=acos(((cos(3*pi/5+e)-q1).*(t-q1)+(sin(3*pi/5+e)-q2).*(-q2))./
(sqrt((cos(3*pi/5+e)-q1).*(cos(3*pi/5+e)-q1)+(sin(3*pi/5+e)-q2).*
(sin(3*pi/5+e)-q2)).*sqrt((t-q1).*(t-q1)+q2.*q2))));
k=2*pi/5-e-g;
end
```

Anlage 3

Zum 3. Fall: Die Berechnung von k aus den Variablen $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_r, \varepsilon_s, \varepsilon_2$ und ε_4 , die in einem Vektor e zusammengefasst sind

```
function [k] = DritterFall(e)
e1=e(1);
e5=e(2);
er=e(3);
es=e(4);
e2=e(5);
e4=e(6);

z=-pi/5+e1+e4+e5;
ea=e1+e5; eb=er+es;
v=sin(2*pi/5-e1)./sin(2*pi/5-e5); ( $v = |Op_5|$ ) w=t.*sin(2*pi/5-er)./sin(2*pi/5-
es); ( $w = |Oq_5|$ )
m=(2+(cos(2*pi/5-e2).*sin(pi/5+ea)).*(v+1)./sin(2*pi/5-e2)-cos(pi/5+ea).*(
v+1))./(cos(z)-cos(2*pi/5-e2).*sin(z)./sin(2*pi/5-e2)); ( $m$  ist  $\mu$  von der Gerade
 $g_2$  zur Berechnung von  $p$ , diese Berechnung wurde nicht extra ausgefhrt, sondern
gleich in  $\varphi_{i(j)}$  eingesetzt um  $q$  zu erhalten:)
q1=t.*(cos(pi/5+ea).*(v+1)+cos(z).*m)+(cos(pi/5+eb).*w-t.*
cos(pi/5+ea).*v)./(sin(pi/5+ea).*v).*(sin(pi/5+ea).*(v+1)+sin(z).*m);
( $\text{erster Vektoreintrag von } q \text{ durch die Berechnung von } A \cdot p$ )
q2=sin(pi/5+eb).*w./(sin(pi/5+ea).*v).*(sin(pi/5+ea).*(v+1)+sin(z).*m);
( $\text{zweiter Vektoreintrag von } q \text{ durch die Berechnung von } A \cdot p$ )
r1=t.*cos(pi/5+ea).*(v+1)+(cos(pi/5+eb).*w-t.*cos(pi/5+ea).*v)./
(sin(pi/5+ea).*v).*sin(pi/5+ea).*(v+1); ( $\varphi_{i(j)}(p_4)$  1. Komponente)
r2=sin(pi/5+eb).*w./(sin(pi/5+ea).*v).*sin(pi/5+ea).*(v+1); ( $\varphi_{i(j)}(p_4)$ 
2. Komponente)
s1=2.*t; ( $\varphi_{i(j)}(p_2)$  1. Komponente) s2=0; ( $\varphi_{i(j)}(p_2)$  2. Komponente)
g=acos(((s1-q1).*(r1-q1)+(s2-q2).*(r2-q2))./(sqrt((s1-q1).*(s1-q1)+(s2-q2).*(
s2-q2)).*sqrt((r1-q1).*(r1-q1)+(r2-q2).*(r2-q2)))); ( $g = \gamma$ )
k=4*pi/5-er-es-g; ( $\text{wenn positiv haut es hin}$ )
end
```

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände die vorliegende Bachelorarbeit für die öffentliche Benutzung im Universitätsarchiv zur Verfügung zu stellen.

Jena, 10. September 2012,

Katharina Blechschmidt